

Epreuve sur dossier du CAPES externe de mathématiques, session 2014

(ORAL 2)

Ce document contient la liste des dossiers proposés aux candidats passant le second oral du CAPES externe 2014 (session normale), telle qu'elle a été publiée sur le site officiel du Jury de l'époque.

Pour me contacter : dany-jack.mercier@hotmail.fr.
Ce document est placé sur le site MégaMaths.

[0] [epreuvesurdossier2014]

Thème : modélisation

L'exercice

Boule 100% acier
Diamètre de la boule : 73 mm
Masse de la boule : 720 g
Stries : sans
Aspect : satiné

Métaux	**Masse volumique** (en kg/m^3)
Aluminium	2 700
Cuivre	8 800
Fer forgé	7 600
Acier	7 775
Nickel	8 700
Titane	4 540

Une boule de pétanque est-elle pleine ou creuse ?

Les productions de deux groupes d'élèves de troisième

Production 1

kg	*hg*	*dag*	*g*
0,	*7*	*2*	*0*

Le volume de la boule est : $V = \dfrac{m}{m_V} = \dfrac{0{,}720}{7\,775} = 0{,}000\,092\,605\ m^3$

On a aussi $V = \dfrac{4}{3}\pi R^3 = \dfrac{4}{3}\pi \times 36{,}5^3 = 203\,689\ mm^3$

Mais, cela ne correspond pas, on a du faire une erreur.

Production 2

$73\ mm \div 2 = 36{,}5\ mm = 0{,}0365\ m$

Avec le tableur, nous avons trouvé qu'une boule pleine pèse $1{,}583\ kg$

La boule de pétanque est moins lourde, donc elle est creuse et il y a 863 g *de vide.*

Ensuite, comme vous l'avez demandé à notre groupe, nous avons cherché l'épaisseur d'acier de cette boule de pétanque.

Avec le tableur, on a essayé plusieurs valeurs pour trouver le rayon d'une boule d'acier de 863 g.

$0{,}0365 - 0{,}0298 = 0{,}0067$

Ce qui fait une épaisseur de $6{,}7\ mm$.

Rayon	*Volume*	*Masse*
0,0365	*0,000203689*	*1,58368061*
0,01	*4,18879E-06*	*0,03256784*
0,02	*3,35103E-05*	*0,26054275*
0,03	*0,000113097*	*0,87933178*
0,029	*0,00010216*	*0,79429714*
0,0295	*0,000107536*	*0,8360939*
0,0297	*0,000109738*	*0,85321475*
0,0298	*0,00011085*	*0,86186213*
0,0299	*0,00011197*	*0,87056774*

Le travail à exposer devant le jury

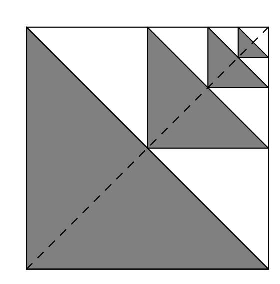
1- Analysez les deux productions en mettant en évidence les compétences acquises.

2- En vous appuyant sur les productions, proposez une correction telle que vous l'exposeriez devant une classe de troisième.

3- Présentez deux ou trois exercices sur le thème *modélisation*, en prenant soin d'expliquer ce qui a motivé vos choix.

Thème : suites

L'exercice



En traçant la diagonale d'un carré de côté a, on obtient un triangle rectangle que l'on colore en gris, comme sur la figure ci-contre. On recommence de la même manière dans le quart en haut à droite du carré, et ainsi de suite...

Calculer l'aire de la partie grisée.

Les réponses de deux élèves

Élève 1

Le carré a pour aire a^2. *Le premier triangle gris a donc une aire de* $0,5a^2$. *Le deuxième triangle a des côtés deux fois plus petits et a donc une aire* 4 *fois plus petite donc* $0,25 \times 0,5a^2$. *De même pour le troisième et le quatrième qui ont pour aires respectives* $0,25 \times 0,25 \times 0,5a^2$ *et* $0,25 \times 0,25 \times 0,25 \times 0,5a^2$.
Au final, l'aire grisée est de $0,5a^2(1 + 0,25 + 0,25^2 + 0,25^3) = 0,6640625a^2$

Élève 2

Notons a_1 *l'aire du premier triangle. On a* $a_1 = \frac{1}{2}a^2$. *Les triangles sont tous des réductions du précédent avec un coefficient de* $\frac{1}{2}$ *pour les longueurs et donc de* $\frac{1}{4}$ *pour les aires. D'où, pout tout entier naturel* $n \geqslant 1$, *on a* $a_{n+1} = \frac{1}{4}a_n$, *c'est donc une suite géométrique de premier terme* $\frac{1}{2}a^2$ *et de raison* $\frac{1}{4}$.
Utilisons un algorithme pour trouver la somme de toutes ces aires quand le nombre de triangles devient très grand pour $a = 1$ *:*

entrée	*demander n*
initialisation	*aire prend la valeur 0,5*
	S prend la valeur 0
traitement	*pour k allant de 1 à n*
	S prend la valeur S + aire
	aire prend la valeur $0,25 \times$ *aire*
	finpour
sortie	*afficher S*

Pour $n = 10$ *cet algorithme renvoie* $0,6666660309$ *; pour* $n = 50$ *et pour* $n = 100$ *, cet algorithme renvoie* $S = 0,666666667$. *On peut donc dire que l'aire grisée est* $\frac{2}{3}a^2$.

Le travail à exposer devant le jury

1- Analysez les productions de ces deux élèves en étudiant notamment la pertinence de la démarche et des outils utilisés, ainsi que l'engagement dans une activité de recherche.

2- Proposez, en vous appuyant sur les productions des élèves, une correction de cet exercice telle que vous l'exposeriez devant une classe de première scientifique.

3- Présentez deux ou trois exercices sur les *suites* dont l'un au moins fait appel à un algorithme. Vous préciserez les compétences visées par ces exercices.

Thème : problèmes de géométrie plane

L'exercice proposé par le professeur

À partir d'un carré $ABCD$, on construit un triangle équilatéral ABE à l'intérieur du carré et un triangle équilatéral CBF à l'extérieur du carré. Le but de ce problème est de montrer que les points D, E et F sont alignés.

1. Faire une figure.
2. On choisit de travailler dans le repère orthonormé (A, B, D).
   a) Donner les coordonnées de A, B, C et D dans ce repère.
   b) On appelle H le pied de la hauteur issue de E dans le triangle ABE.
   Calculer la valeur exacte de la distance EH dans ce repère.
   En déduire les coordonnées de E et F dans ce repère.
3. Démontrer que les points D, E et F sont alignés.

Un extrait du programme de seconde

Géométrie

L'objectif de l'enseignement de la géométrie plane est de rendre les élèves capables d'étudier un problème dont la résolution repose sur des calculs de distance, la démonstration d'un alignement de points ou du parallélisme de deux droites, la recherche des coordonnées du point d'intersection de deux droites, en mobilisant des techniques de la géométrie plane repérée.
Les configurations étudiées au collège, à base de triangles, quadrilatères, cercles, sont la source de problèmes pour lesquels la géométrie repérée et les vecteurs fournissent des outils nouveaux et performants.
En fin de compte, l'objectif est de rendre les élèves capables d'étudier un problème d'alignement de points, de parallélisme ou d'intersection de droites, de reconnaissance des propriétés d'un triangle, d'un polygone - toute autonomie pouvant être laissée sur l'introduction ou non d'un repère, l'utilisation ou non de vecteurs.
Dans le cadre de la résolution de problèmes, l'utilisation d'un logiciel de géométrie dynamique par les élèves leur donne une plus grande autonomie et encourage leur prise d'initiative.

Le travail à exposer devant le jury

1- Après avoir analysé dans quelle mesure l'énoncé de l'exercice répond aux attentes du programme de seconde, proposez une nouvelle rédaction qui laisse plus de place à l'initiative des élèves.

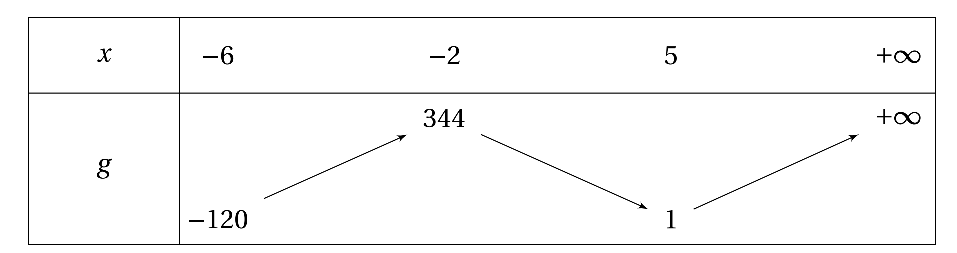
2- Exposez une correction de la question 3 de l'exercice proposé par le professeur comme vous le feriez devant une classe de seconde.

3- Présentez deux ou trois exercices sur le thème *problèmes de géométrie plane*. Vous motiverez vos choix en indiquant en particulier en quoi ils favorisent la prise d'initiative par les élèves.

Thème : approximation des solutions d'une équation

L'exercice

On considère la fonction g définie sur $[-6\,;+\infty[$ par $g(x) = 2x^3 - 9x^2 - 60x + 276$.
On donne son tableau de variations ci-dessous :



1. Déterminer le nombre de solutions de l'équation $g(x) = 0$ sur $[-6\,;+\infty[$.
2. Donner un encadrement de cette (ou ces) solution(s) avec une amplitude de 0,01.

Les réponses de trois élèves à la question 1.

Élève 1

Puisque 0 *est compris entre* $g(-6) = -120$ *et* $\lim\limits_{x\to\infty} g(x) = +\infty$, *alors l'équation* $g(x) = 0$ *possède une unique solution sur* $[-6\,;+\infty[$.

Élève 2

Puisque g est continue et strictement croissante sur $[-6\,;-2]$, *alors* $g(x) = 0$ *admet une solution sur* $[-6\,;-2]$.
Puisque g est continue et strictement décroissante sur $[-2\,;5]$, *alors* $g(x) = 0$ *admet une solution sur* $[-2\,;5]$.
Puisque g est continue et strictement croissante sur $[5\,;+\infty[$, *alors* $g(x) = 0$ *admet une solution sur* $[5\,;+\infty[$.
Donc $g(x) = 0$ *possède* 3 *solutions sur* $[-6\,;+\infty[$.

Élève 3

Sur $[-6\,;-2]$: 0 *n'appartient pas à* $[-6\,;-2]$ *donc* $g(x) = 0$ *n'a pas de solution sur* $[-6\,;-2]$.
Sur $[-2;5]$ *: g est strictement décroissante, continue et 0 est compris entre* -2 *et* 5 *donc* $g(x) = 0$ *admet une solution.*
Sur $[5\,;+\infty[$ *: 0 n'est pas compris entre* 5 *et* $+\infty$ *donc* $g(x) = 0$ *n'a pas de solution.*
Donc $g(x) = 0$ *a une seule solution sur* $[-6\,;+\infty[$.

Le travail à exposer devant le jury

1- Analysez chacune des productions d'élèves en mettant en évidence leurs réussites et en indiquant comment les aider à surmonter leurs éventuelles difficultés.

2- Exposez une correction de la question 2, comme vous le feriez devant une classe de première, en mettant en oeuvre un algorithme.

3- Présentez deux ou trois exercices conduisant à l'*approximation des solutions d'une équation* dont l'un au moins prend appui sur une situation à support concret. Vous prendrez soin de motiver vos choix.

Thème : arithmétique

L'exercice

Le code d'identification d'un article est composé de sept chiffres entre 0 et 9. Les six premiers chiffres identifient l'article, le septième est une clé de contrôle destinée à détecter une erreur dans l'écriture des six premiers chiffres. On notera $x_1x_2x_3x_4x_5x_6x_7$ un tel code.
La clé de contrôle x_7 est le reste dans la division euclidienne par 10 de la somme :

$$N = (x_1 + x_3 + x_5) + 7(x_2 + x_4 + x_6).$$

1. Calculer la clé du code suivant : 923451•.
2. Un des chiffres du code suivant a été effacé : 134•752. Retrouver ce chiffre.
3. Dans cette question, deux des chiffres du code ont été intervertis :
   au lieu de saisir $x_1x_2x_3x_4x_5x_6x_7$, le dactylographe a saisi $x_1x_3x_2x_4x_5x_6x_7$.
   Pour quelles valeurs de x_2 et de x_3 la clé de contrôle ne détecte-t-elle pas l'erreur ?

Des productions d'élèves

Question 1.
$N = (9+3+5)+7\times(2+4+1) = 17+49 = 66$. *Or* $\frac{66}{10} = 6,6$.
Le reste de la division euclidienne de N *par* 10 *est* 6. *La clé de contrôle est donc* 6.
Question 2.
$N = (1+4+7)+7\times(3+x_4+5) = 68+7x_4$. *Pour que* $68+7x_4 = 10q+2$ *il faut que* $x_4 = 2$.
En effet $82 = 10\times 8+2$.
Question 3.
On a $N_1 = (x_1+x_3+x_5)+7\times(x_2+x_4+x_6)$ *et* $N_2 = (x_1+x_2+x_5)+7\times(x_3+x_4+x_6)$.
Pour que l'erreur ne soit pas détectée il faut que $N_1 \equiv N_2(10)$, *c'est à dire que* $10 \mid (N_1 - N_2)$.
Or $N_1 - N_2 = 6(x_2 - x_3)$. $N_1 - N_2$ *est donc divisible par* 10 *si* $x_2 - x_3 = 0$. *Il faut donc que les deux chiffres soient les mêmes pour que l'erreur ne soit pas détectée.*

Le travail à exposer devant le jury

1- Analysez les productions de ces trois élèves en relevant en particulier leurs réussites et leurs erreurs.

2- Proposez une correction de la question 3 telle que vous la présenteriez devant une classe de terminale scientifique, en vous appuyant sur les productions d'élèves.

3- Proposez deux ou trois exercices sur le thème *arithmétique*. Vous motiverez vos choix en précisant les objectifs visés par ces exercices.

Thème : optimisation

L'exercice

Le carré ABCD a un côté de longueur 8 cm. M est un point du segment [AB]. On dessine comme ci-contre dans le carré ABCD :

– un carré de côté [AM] ;
– un triangle rectangle isocèle de base [MB].

On s'intéresse au motif constitué par le carré et le triangle.

Est-il possible de faire en sorte que l'aire du motif soit la plus grande possible ? la plus petite possible ? Si oui dans quels cas ?

"Une même situation pour divers problèmes", document ressources pour la classe de seconde - Fonctions

Extraits du document ressources pour la classe de seconde - Fonctions

Quels sont les objectifs à atteindre ?

Comme dans toutes les parties du programme, les paragraphes qui précèdent les tableaux précisant les contenus et les capacités attendues, fixent de façon nette les objectifs à atteindre et les déclinent en termes de **nature des problèmes que les élèves doivent savoir résoudre, précisant également le degré d'autonomie attendu**.

Ces objectifs sont ambitieux, le degré d'autonomie que les élèves doivent montrer pouvant être maximal : autonomie du choix de la démarche, de la nature du traitement à apporter, de la modélisation à mettre en œuvre.

> **Construire chez tout élève cette autonomie nécessite une formation adaptée incluant une confrontation fréquente à des problèmes posés sous une forme ouverte.**

Le programme fixe comme objectif la maîtrise de [...] problèmes d'optimisation ou du type « $f(x) > k$ ». Dans un premier temps un élève doit pouvoir résoudre un tel problème, de façon exacte ou approchée, à l'aide d'un graphique et de façon exacte si les variations de la fonction et les antécédents de k sont connus. Dans un second temps cette étude peut être faite, selon les cas, en exploitant les potentialités de logiciels, graphiquement ou algébriquement, toute autonomie pouvant être laissée pour associer au problème une fonction.

Le travail à exposer devant le jury

1- Précisez en quoi l'exercice proposé répond aux objectifs mentionnés dans le document ressources et proposez différentes démarches possibles d'élèves.

2- Exposez deux corrections de cet exercice, l'une telle que vous le feriez devant une classe de troisième, l'autre devant une classe de première.

3- Présentez deux exercices d'*optimisation* en motivant vos choix.

Thème : mise en œuvre d'algorithmes en analyse

L'exercice

Soit la fonction f définie sur $[0\,;+\infty[$ par $f(x) = \dfrac{4x-1}{x+2,5}$.
On appelle C sa courbe représentative dans un repère orthonormé du plan.

Partie A.

1. Déterminer algébriquement le plus petit réel A tel que si $x \geqslant A$ alors $4 - f(x) \leqslant 0,01$.
2. Interpréter graphiquement le résultat.

Partie B.

1. Expliquer le rôle de l'algorithme ci-contre.
2. Pourquoi peut-on affirmer que cet algorithme, quelle que soit la valeur de a strictement positive introduite, s'arrêtera et affichera une valeur de x ?
3. Si a prend la valeur 0,01, l'algorithme retourne-t-il la valeur trouvée à la question A.1. ?

Entrées et initialisation
Saisir a (nombre positif "proche de 0")
x prend la valeur 1
Traitement
Tant que $\dfrac{11}{x+2,5} > a$
x prend la valeur $x+1$
Fin du tant que
Sorties
Afficher x

Extraits des programmes

Terminale STI2D

Contenus	***Capacités attendues***	***Commentaires***
Limite de fonctions *Asymptotes parallèles aux axes :* *- limite finie d'une fonction à l'infini* *- limite infinie d'une fonction en un point*	*•Interpréter une représentation graphique en termes de limite* *•Interpréter graphiquement une limite en termes d'asymptote*	*Ces notions sont introduites par une approche numérique et graphique à l'aide d'un logiciel ou d'une calculatrice*

Terminale S

Dans le cas d'une limite infinie, étant donnés une suite croissante (u_n) et un nombre réel A, déterminer à l'aide d'un algorithme un rang n à partir duquel u_n est supérieur à A.

Le travail à exposer devant le jury

1- Analysez dans quelle mesure cet exercice correspond aux attentes des programmes du lycée.

2- Exposez une correction de la partie B comme vous le feriez devant une classe de terminale.

3- Proposez deux ou trois exercices sur le thème *mise en œuvre d'algorithmes en analyse*. Vous mettrez en évidence les objectifs de formation visés par chacun d'eux.

Thème : prise de décision

L'exercice

En France, la proportion d'individus de groupe sanguin O est de 43 %.
Une enquête statistique est menée pour déterminer si la proportion d'individus de groupe sanguin O dans une certaine région est identique à celle de la France.
On dispose d'un échantillon aléatoire de 200 résultats d'analyses de sang, réalisées dans des laboratoires de la région étudiée, sur lequel on a observé 120 individus de groupe O.
Ce résultat nous amène-t-il à remettre en cause l'idée selon laquelle la proportion d'individus de groupe O dans cette région est identique à celle de la France ?

Les réponses de deux élèves

Élève 1

120 individus de groupe sanguin O sur 200 dans cette région, cela fait une fréquence de 60 % ce qui est vraiment plus grand que 43 %. Il est impossible que ce soit lié au seul hasard. Il semble certain que la proportion d'individus de groupe sanguin O est plus grande dans cette région qu'en France.

Élève 2

À l'aide d'un tableur, j'ai simulé le groupe sanguin de 200 individus avec la probabilité $p = 0{,}43$ que le groupe sanguin soit O. J'ai compté le nombre d'individus de groupe sanguin O et j'en ai trouvé 80 soit une fréquence de 0,40. J'ai appuyé un grand nombre de fois sur F9 et j'ai observé très rarement des fréquences supérieures à 0,50 et une seule fois une fréquence supérieure à 0,60. Cela paraît donc possible que les 60 % de groupe O observés dans cette région soient du hasard mais cela me paraît peu probable. Je pense que la proportion d'individus de groupe O est supérieure dans cette région et qu'il faudrait étudier l'origine d'un tel écart par d'autres investigations.

Le travail à exposer devant le jury

1- Analysez la production de chaque élève en mettant en évidence ses compétences en probabilités.

2- Exposez une correction de l'exercice comme vous le feriez devant une classe de première S, en vous appuyant sur les productions d'élèves.

3- Proposez deux ou trois exercices sur le thème *prise de décision* à des niveaux de classe différents. On explicitera pour chacun d'eux l'objectif pédagogique.

Thème : problèmes conduisant à une résolution d'équation

L'exercice

1. Est-il possible de construire un rectangle de périmètre 17 cm et d'aire 17 cm^2 ?
   Si oui, on précisera les dimensions de ce rectangle.
2. Plus généralement, soit k un nombre réel strictement positif. Pour quelles valeurs de k est-il possible de construire un rectangle de périmètre k (en cm) et d'aire k (en cm^2) ?

Les productions de deux élèves de première.

Élève 1

Déjà, je pense que c'est possible car on peut très bien construire un rectangle de périmètre 16 cm et d'aire 16 cm^2 en prenant un carré de côté 4. Mais pour 17 cela semble moins évident.
J'appelle x la longueur et y la largeur du rectangle. Le périmètre vaut $2x+2y$ et l'aire xy.
J'obtiens alors le système suivant :

$$\begin{cases} x+y=8,5 \\ xy\ =17 \end{cases}$$

Dans la deuxième équation j'ai $y=\dfrac{17}{x}$. En remplaçant dans la première, j'obtiens $x+\dfrac{17}{x}=8,5$, puis en multipliant par x de chaque côté $x^2+17=8,5x$.
On a alors $x^2=8,5x-17$, donc $x=\sqrt{8,5x-17}$.

Élève 2

Je note x la longueur et y la largeur du rectangle.
Sur un tableur j'ai fait une colonne pour x avec des valeurs que j'ai choisies.
Pour les y, j'ai tapé dans B2 la formule = 8,5 − A2 et j'ai recopié vers le bas. Comme cela, le périmètre vaudra bien 17.
Ensuite dans la cellule C2 j'ai calculé l'aire avec = A2 ∗ B2 et j'ai aussi recopié vers le bas. Je vois que l'aire vaut bien 17 mais même en augmentant les décimales, le résultat ne tombe pas juste.

	A	B	C
1	x	y	aire
2	2.9	5.6	16.24
3	3	5.5	16.5
4	3.1	5.4	16.74
5	3.2	5.3	16.96
6	3.3	5.2	17.16
7	3.4	5.1	17.34
8	3.5	5	17.5

Je modifie les valeurs de la colonne des x pour avoir une aire de 17 cm^2.

En continuant, on doit bien finir par y arriver...

	A	B	C
1	x	y	aire
2	3.2	5.3	16.96
3	3.21	5.29	16.9809
4	3.219	5.281	16.999539
5	3.2191	5.2809	16,99974519
6	3.2192	5.2808	16.99995136
7	3.2193	5.2807	17.00015751

Le travail à exposer devant le jury

1 – Analysez les productions des élèves, en précisant, pour chacun, l'aide que vous pourriez lui apporter.

2 – Proposez une correction de la question 2 telle que vous l'exposeriez devant une classe de première, en vous appuyant sur les productions des élèves.

3 – Présentez deux ou trois *problèmes conduisant à une résolution d'équation*. Vous motiverez votre choix en explicitant les objectifs visés par chacun d'eux.

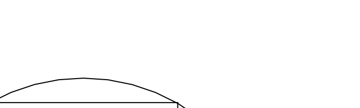
Thème : géométrie dans l'espace

L'exercice

On dispose d'un coffre cubique mesurant 30 cm de côté.
On veut le couvrir d'une cloche ayant la forme d'une demi-sphère en la positionnant de sorte que son centre coïncide avec le centre du carré de base du coffre.
Quel peut être le rayon minimal de la cloche ?

Les solutions de deux élèves de seconde.

Élève 1



On sait que : chaque arête du carré fait 30 cm
la moitié d'une arête fait 15 cm
Pour calculer AC, j'utilise le théorème de Pythagore.

$$AC^2 = 15\,cm^2 + 30\,cm^2$$

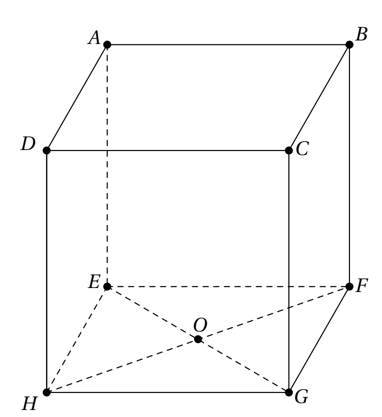
$$AC^2 = 225 + 900 = 1\,125$$

$$AC = \sqrt{1\,125} \approx 33{,}5$$



Le rayon de la demi-sphère est égal à 33,5 *cm.*

Élève 2



Pour calculer le rayon minimal de la demi-sphère, il faut calculer la diagonale reliant deux sommets opposés.
Soit le cube ABCDEFGH représenté ci-contre.
D'après le théorème de Pythagore dans HGF rectangle en G

$$FH^2 = FG^2 + GH^2 = 30^2 + 30^2 = 1\,800$$

$$FH = \sqrt{1\,800} \approx 42,4cm$$

Ainsi $OF = \dfrac{42{,}4}{2} = 21{,}2$

Le rayon de la cloche est de 21,2 *cm.*

Le travail à exposer devant le jury

1 – Analysez la production de chaque élève en mettant en évidence ses réussites et en indiquant l'origine de ses éventuelles erreurs.

2 – En vous appuyant sur les productions des élèves, corrigez cet exercice comme vous le feriez devant une classe de seconde.

3 – Présentez deux ou trois exercices de *géométrie dans l'espace*. On s'attachera à mettre en évidence l'intérêt de chacun d'eux pour la formation mathématique des élèves.

Thème : suites

L'exercice

La plupart des lignes électriques font circuler du courant alternatif. Certaines font circuler du courant continu à très haute tension qui occasionne moins de pertes que le courant alternatif notamment lorsque les lignes sont immergées, mais aussi lorsque les distances sont très importantes.
En 2012, la plus longue liaison électrique à courant continu à très haute tension en service dans le monde relie la centrale hydro-électrique de Xiangjiaba à la ville de Shanghai. Elle mesure environ 1900 km ; sa puissance électrique initiale est de 6 400 MW ; le courant est transporté sous une tension de 800 kV.
Lorsque du courant électrique circule dans un câble, une partie de la puissance électrique est perdue. On estime les pertes de puissance électrique d'un courant continu à très haute tension à 0,3 % pour une distance de 100 kilomètres.

1. Quelle est la puissance électrique à l'arrivée de la ligne Xiangjiaba-Shanghai ?
2. D'autres lignes électriques à très haute tension, en courant continu, sont en cours d'étude. On souhaite limiter la perte de puissance électrique à 7 % sur ces lignes.
   Déterminer, à cent kilomètres près, la longueur maximale d'une ligne à très haute tension en courant continu pour laquelle la perte de puissance reste inférieure à 7 %.

D'après baccalauréat STI2D session 2013

Les réponses proposées par deux élèves de Terminale STI2D

Élève 1

1. Tous les 100 *km, la ligne perd* $6400 \times \dfrac{0,3}{100}$ *MW* $= 19,2$ *MW.*
Au bout de 1900 *km, elle a perdu* $19 \times 19,2 = 364,8$ *MW.*
$6400 - 364,8 = 6035,2$. *Il reste donc* $6035,2$ *MW au bout de la ligne.*

2. Au bout de $n \times 100$ *km, la ligne perd* $6400 - n \times 19,2$ *MW.*
On pose $u_n = 6400 - n \times 19,2$.
Avec un tableur, je calcule les termes de cette suite.
Il ne faut pas qu'elle descende au-dessous de $6400 - 0,07 \times 6400 = 5952$.
J'ai trouvé $n = 24$. *La longueur maximale est donc de* 2300 *km.*

Élève 2

1. $6400 \times 0,997^{19} = 6044,88$ *MW.*
2. $6400 \times 0,997^n \geqslant 0,93 \times 6400$, *donc* $0,997^n \geqslant 0,93$, *donc* $n \ln(0,997) \geqslant \ln(0,93)$.
Donc $n \geqslant \dfrac{\ln(0,93)}{\ln(0,997)}$. *D'où* $n \geqslant 24,15$. *Je trouve* $n = 25$.

Le travail à exposer devant le jury

1 – Analysez la production de chaque élève en mettant en évidence ses réussites et l'origine de ses éventuelles erreurs.

2 – À partir des réponses des deux élèves, proposez une correction de l'exercice telle que vous l'exposeriez devant une classe de terminale STI2D.

3 – Présentez deux ou trois exercices sur le thème *suites* à des niveaux de classe différents, en explicitant les objectifs pédagogiques.

Thème : arithmétique

L'exercice

Déterminer l'ensemble des couples d'entiers (x, y) vérifiant : $2x+3y=1$.

Les réponses de deux élèves de terminale S

Élève 1

$(-1, 1)$ *est une solution particulière.*
$2x+3y=1$ *est équivalent à* $y=-\frac{2}{3}x+\frac{1}{3}$.
$-\frac{2}{3}$ *est le coefficient directeur de cette droite donc on se déplace de* $3k$ *sur* (Ox) *et de* $-2k$ *sur* (Oy).
L' ensemble des solutions est donc :

$$\begin{cases} x = -1+3k \\ y = \ 1-2k \end{cases} \quad \textit{avec } k \in \mathbb{Z}.$$

Élève 2

$2x+3y=1$ *équivaut à* $3y=1+2(-x)$ *ce qui revient à* $3y \equiv 1\,[2]$ *ou encore à* $y \equiv 1\,[2]$.
Donc $y=1+2k$.
$2x+3y=1$ *équivaut à* $2x=1+3(-y)$ *ce qui revient à* $2x \equiv 1\,[3]$ *ou encore à* $-x \equiv 1\,[3]$.
Donc $x=-1+3k$.
Les solutions sont $(-1+3k, 1+2k)$, $k \in \mathbb{Z}$.

Le travail à exposer devant le jury

1- Analysez les productions de ces deux élèves en mettant en évidence les compétences acquises.

2- Proposez une correction de l'exercice telle que vous la présenteriez devant une classe de terminale scientifique, en vous appuyant sur les productions des élèves.

3- Proposez deux ou trois exercices sur le thème *arithmétique*. Vous motiverez vos choix en précisant les objectifs visés par ces exercices.

Thème : grandeurs et mesures

L'exercice

Sur la route des vacances, Audrey a parcouru 1 h 30 sur route nationale à une vitesse moyenne de $70\,\text{km}\cdot\text{h}^{-1}$. Le reste du trajet, effectué sur autoroute à vitesse constante, lui a pris 45 minutes. À la fin du trajet, le compteur indique que la vitesse moyenne sur l'ensemble du parcours était de $100\,\text{km}\cdot\text{h}^{-1}$. Audrey a-t-elle respecté la limite de vitesse sur autoroute, qui était de $130\,\text{km}\cdot\text{h}^{-1}$?

Les réponses de trois élèves

Élève 1

Sur autoroute, Audrey a mis deux fois moins de temps, elle est donc allée deux fois plus vite, ce qui fait $140\,\text{km}\cdot\text{h}^{-1}$. *Elle n'a donc pas respecté la limitation de vitesse.*

Élève 2

Sur la route nationale, Audrey a parcouru $70+35=105\,\text{km}$. *Si elle est allée à vitesse maximale sur l'autoroute, elle a parcouru* $130\times 0{,}45=58{,}5\,\text{km}$.
En tout cela ferait $163{,}5\,\text{km}$ *en* $1{,}75$ *heures. Cela fait donc une vitesse inférieure à* $100\,\text{km}\cdot\text{h}^{-1}$. *Audrey n'a pas respecté la limite.*

Élève 3

Pour avoir une vitesse moyenne de $100\,\text{km}\cdot\text{h}^{-1}$, *il faut avoir une vitesse* v *sur autoroute telle que*

$$\frac{70+v}{2}=100.$$

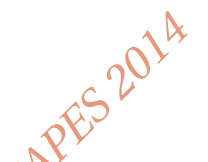
Donc $70+v=200$, *d'où* $v=130$. *Elle a respecté les limitations de vitesse.*

Le travail à exposer devant le jury

1 – Analysez la production de chaque élève en mettant en évidence ses réussites, même partielles.

2 – Exposez une correction de l'exercice comme vous le feriez devant une classe de troisième, en vous appuyant sur les productions des élèves.

3 – Proposez deux ou trois exercices sur le thème *grandeurs et mesures*. On explicitera pour chacun d'eux l'objectif pédagogique.



Thème : géométrie plane

L'exercice proposé par le professeur

Dans un repère orthonormé, placer les points $A(2,6), B(2,0), C(-2,2), D(7,1)$, $E(2,2), F(0,4)$ et $G(5,3)$.

1. Démontrer que les points A, C, F sont alignés, ainsi que les points A, E, B et A, G, D.
2. a) Déterminer une équation de la droite (EF) et une équation de la droite (BC). En déduire les coordonnées du point I, intersection des droites (EF) et (BC).
   b) On appelle J le point d'intersection de (EG) et (BD), et H le point d' intersection de (FG) et (CD). On admet que $J(-13,-3)$ et $H(25,-1)$.
   Démontrer que les points I, J, H sont alignés.

L'extrait d'un manuel

Le théorème de Desargues

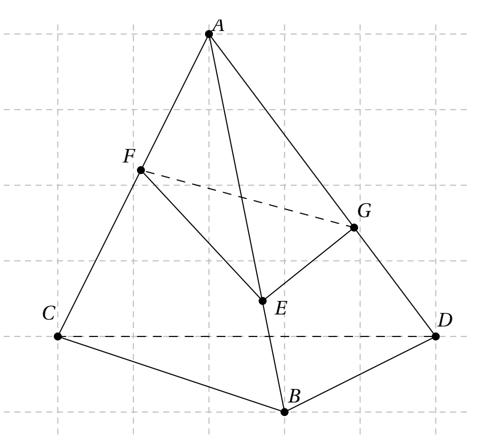
1. À l'aide du logiciel, reproduire la vue en perspective cavalière de la pyramide $ABCD$ ci-contre en s'aidant du quadrillage.

2. Construire le point I, intersection de (BC) et (EF), et le point J, intersection de (BD) et (EG).

3. a) Construire le point H, point d'intersection des droites (CD) et (FG).

b) Déplacer les points E, F, G et conjecturer la position des points I, J et H.

c) Démontrer le résultat obtenu en considérant les plans (EFG) et (CBD).



Le travail à exposer devant le jury

1 – Comparez les deux versions de l'exercice en analysant les différentes compétences que chacune d'elles vise à développer chez les élèves.

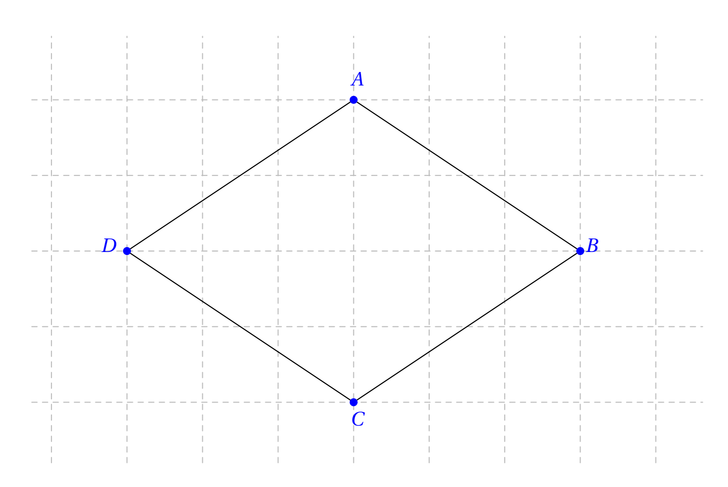
2 – Exposez une correction de la question 2 de l'exercice proposé par le professeur comme vous le feriez devant une classe de seconde, puis une correction de l'exercice du manuel.

3 – Présentez deux ou trois exercices sur le thème *géométrie plane*, dont l'un au moins fait appel à un logiciel de géométrie dynamique. Vous motiverez vos choix en indiquant les compétences que vous cherchez à développer chez les élèves.

Thème : optimisation

L'exercice du professeur

Un losange $ABCD$ a pour périmètre p.
Quelle forme doit-il avoir pour que son aire soit la plus grande possible ?



Pour les plus rapides, essayez de démontrer le résultat conjecturé en posant par exemple $\alpha = \widehat{BAC}$...

L'extrait d'un manuel

1. *f est la fonction telle que $f(x) = x\sqrt{\dfrac{p^2}{4} - x^2}$, où p est un réel strictement positif.*
   a) *Vérifier que f est définie sur $\left[-\dfrac{p}{2}, \dfrac{p}{2}\right]$.*
   b) *Étudier le sens de variation de f et démontrer que f admet un maximum pour $x = \dfrac{p}{2\sqrt{2}}$.*
2. *On s'intéresse à tous les losanges de périmètre donné p.*
   On appelle x la longueur d'une diagonale.
   a) *Exprimer l'aire de ces losanges en fonction de p et de x.*
   b) *En utilisant la question 1, déterminer parmi tous ces losanges, celui qui a l'aire maximale. Quelle est sa nature ?*

Bordas Terminale S 2012, collection Indice

Le travail à exposer devant le jury

1- Analysez les compétences développées chez les élèves par les deux versions de l'exercice.

2- Proposez une correction de l'exercice du professeur telle que vous la présenteriez devant une classe de terminale scientifique.

3- Présentez deux ou trois exercices sur le thème *optimisation* à des niveaux de classe différents et dont l'un au moins nécessite la mise en œuvre d'un logiciel de géométrie dynamique.

Thème : différents types de raisonnement

L'exercice

Les propositions suivantes sont indépendantes. Pour chacune d'elles, préciser si elle est vraie ou fausse en justifiant la réponse.

1. Pour tout entier n, le nombre $3n^2 + 3n + 6$ est divisible par 6.
2. Toute fonction qui n'admet pas de maximum admet un minimum.
3. Le triangle ABC ayant pour dimensions $AB = 4$, $AC = 6$ et $BC = 7$ est rectangle en A.
4. Le nombre $\sqrt{2}$ est décimal.

Les réponses de deux élèves de seconde

Élève 1

1. *J'ai cherché sur tableur, et c'est vrai pour tous les entiers que j'ai testés. La proposition est vraie.*
2. *Dans les tableaux de variations, il y a toujours un maximum et un minimum. Ce n'est pas possible de ne pas admettre de maximum.*
3. $AB^2 + AC^2 = 52$ *et* $BC^2 = 49$. *Donc d'après la réciproque de Pythagore, le triangle n'est pas rectangle. La proposition est fausse.*
4. *J'ai utilisé la calculatrice :* $\sqrt{2} = 1,4142135623731$.
   La proposition est vraie.

Élève 2

1. *Si n est pair, c'est vrai car tout est divisible par* 6. *Pour n impair, je n'ai pas réussi à trouver.*
2. *On a vu la fonction* $f(x) = x^2$. *Elle n'a pas de maximum et elle a bien un minimum. La proposition est vraie.*
3. $AB^2 + AC^2 = 52$, *et* $\sqrt{52} \approx 7,2$.
   $7,2 \neq 7$. *Donc le triangle n'est pas rectangle. La proposition est fausse.*
4. $\sqrt{2} \times \sqrt{2} = 2$.
   On a $\sqrt{2} = 1,\ldots$.
   Si on fait $1,\ldots 1 \times 1,\ldots 1$, *le nombre se termine par* 1.
   Si on fait $1,\ldots 2 \times 1,\ldots 2$, *le nombre se termine par* 4.
   J'ai essayé toutes les possibilités et on ne peut jamais avoir 2.
   La proposition est fausse.

Le travail à exposer devant le jury

1 - Analysez la production de chaque élève en explicitant le type de raisonnement utilisé et indiquez de quelle manière on pourrait le rendre plus rigoureux.

2 - Exposez une correction des questions 1 et 4 comme vous le feriez devant une classe de seconde.

3 - Proposez trois ou quatre exercices mettant en œuvre des raisonnements de types différents.

Thème : applications des mathématiques à d'autres disciplines

L'exercice

Lorsque la vitesse de coupe d'une scie sauteuse dépasse 1,5 m.s^{-1}, la découpe d'un plastique dur – tel que le plexiglas – devient impossible, car il y a un échauffement trop important du matériau, et donc un risque de fonte de celui-ci.

Le but de l'exercice est de déterminer la fréquence de rotation F d'un point A de la manivelle – élément de la scie sauteuse qui permet de régler la vitesse de coupe – afin que la vitesse maximale de coupe n'excède pas 1,5 m.s^{-1}. La fréquence de rotation de la manivelle est commandée par une molette de réglage (*voir figures au verso*).

La modélisation mathématique de ce problème conduit à étudier le mouvement du point H, projeté orthogonal du point A sur l'axe des ordonnées. Celui-ci est décrit par la fonction g définie par :

$$y_H = g(t) = 12\sin(2\pi Ft) \text{ où } y_H \text{ est exprimée en mm, } F \text{ en tours.s}^{-1} \text{ et } t \text{ en } s.$$

Fréquence de rotation en fonction de la molette de réglage.

Position de la molette	Fréquence de rotation (tours.min^{-1})
1	500
2	1000
3	1400
4	2000
5	2500
6	3100

1. Exprimer la vitesse instantanée du point H en fonction de t et de la fréquence de rotation F.
2. Déterminer la vitesse maximale du point H.
3. Déterminer la fréquence de rotation F du point A de sorte que la vitesse du point H qui correspond à la vitesse de coupe n'excède pas 1,5 m.s^{-1}.
4. Préciser la position choisie pour la molette de réglage.

D'après document Ressources interdisciplinaires, classe de première STI2D

Extraits du document ressources interdisciplinaires pour la classe de première STI2D

L'objectif premier de la parution de ce document ressource pour la classe de première STI2D est de proposer aux enseignants de mathématiques quelques situations d'appui pour la mise en œuvre du nouveau programme de mathématiques, conformes à l'esprit dans lequel il a été conçu. [...] *ce nouveau programme insiste auprès des enseignants de mathématiques sur la nécessité de :*
- *prendre appui sur les situations expérimentales rencontrées dans les enseignements scientifiques et technologiques de la série,*
- *prendre en compte les besoins mathématiques des autres disciplines.*

[...] ***Etude d'une scie sauteuse, objectifs de l'exercice.***

Mathématiques	*Physique-chimie*	*Enseignement technologique commun*
Fonctions trigonométrique *Fonction dérivée* *Dérivée de sin(wt)*	*Thème : transport* *Sous-thème : Mise en mouvement* *Notions et contenus :* *Référentiels, trajectoires, vitesse, vitesse angulaire, accélération*	*Comportement énergétique des systèmes (transformation de l'énergie)* *Typologie de solutions constructives des liaisons entre solides*

Le travail à exposer devant le jury

1 – En vous appuyant sur le document ressources, précisez l'intérêt d'un enseignement mathématique dans lequel l'étude de situations contextualisées revêt un rôle important.

2 – Exposez une correction de l'exercice telle que vous la présenteriez devant une classe.

3 – Proposez deux ou trois exercices prenant en compte l'utilisation des mathématiques dans d'autres disciplines. Vous motiverez vos choix en indiquant les compétences que vous cherchez à développer chez les élèves.

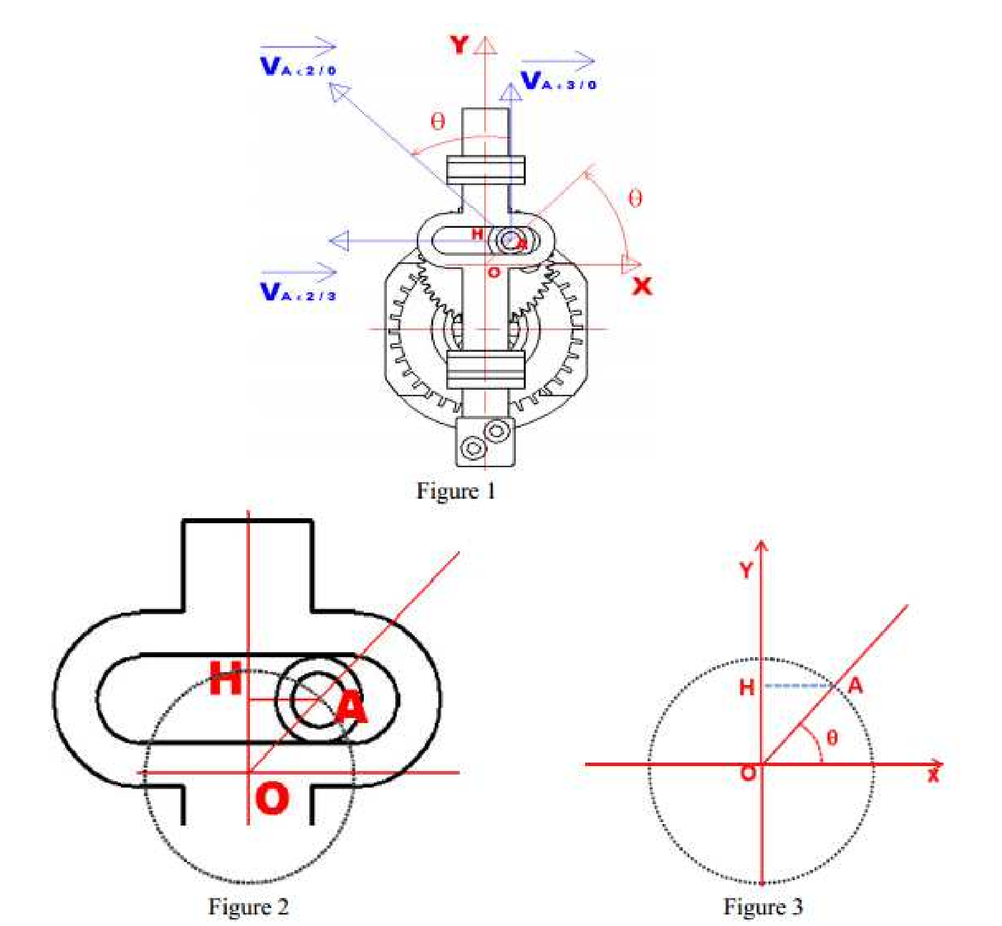


Figure 1

Figure 2

Figure 3